Series ONS **SET-3**

कोड नं.
Code No. **65/3/N**

रोल नं.
Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें।
Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **12** हैं।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **26** प्रश्न हैं।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है। प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा। 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे।
- Please check that this question paper contains **12** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **26** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

Time allowed : 3 hours *Maximum Marks : 100*

सामान्य निर्देश :

(i) ***सभी*** *प्रश्न* ***अनिवार्य*** *हैं।*

(ii) *कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में* ***26*** *प्रश्न हैं।*

(iii) ***खण्ड-अ*** *के प्रश्न* ***1 - 6*** *तक अति लघु-उत्तर वाले प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए* ***1*** *अंक निर्धारित है।*

(iv) ***खण्ड-ब*** *के प्रश्न* ***7 - 19*** *तक दीर्घ-उत्तर* ***I*** *प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए* ***4*** *अंक निर्धारित हैं।*

(v) ***खण्ड-स*** *के प्रश्न* ***20 - 26*** *तक दीर्घ-उत्तर* ***II*** *प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए* ***6*** *अंक निर्धारित हैं।*

(vi) *उत्तर लिखना प्रारम्भ करने से पहले कृपया प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखिए।*

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are* ***compulsory****.*

(ii) *Please check that this question paper contains* ***26*** *questions.*

(iii) *Questions* ***1 - 6*** *in* ***Section-A*** *are very short-answer type questions carrying* ***1*** *mark each.*

(iv) *Questions* ***7 - 19*** *in* ***Section-B*** *are long-answer* ***I*** *type questions carrying* ***4*** *marks each.*

(v) *Questions* ***20 - 26*** *in* ***Section-C*** *are long-answer* ***II*** *type questions carrying* ***6*** *marks each.*

(vi) *Please write down the serial number of the question before attempting it.*

खण्ड - अ

SECTION - A

प्रश्न संख्या 1 से 6 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Question numbers 1 to 6 carry 1 mark each.

1. k के किन मानों के लिए रैखिक समीकरण निकाय

$x + y + z = 2$

$2x + y - z = 3$

$3x + 2y + kz = 4$

का अद्वितीय हल है?

For what values of k, the system of linear equations

$x + y + z = 2$

$2x + y - z = 3$

$3x + 2y + kz = 4$

has a unique solution ?

2. यदि $\vec{a} = 4\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ है, तो वह मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए, जो कि $\vec{a} + \vec{b}$ के समांतर है।

If $\vec{a} = 4\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, then find a unit vector parallel to the vector $\vec{a} + \vec{b}$.

3. λ और μ ज्ञात कीजिए, जब कि

$\left(\hat{i} + 3\hat{j} + 9\hat{k}\right) \times \left(3\hat{i} - \lambda\hat{j} + \mu\hat{k}\right) = \vec{0}$ है।

Find λ and μ if

$\left(\hat{i} + 3\hat{j} + 9\hat{k}\right) \times \left(3\hat{i} - \lambda\hat{j} + \mu\hat{k}\right) = \vec{0}$.

4. समतल $\vec{r}.(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})-5=0$ द्वारा तीनों अक्षों पर काटे गए अंत:खंडों का योग लिखिए।

Write the sum of intercepts cut off by the plane $\vec{r}.(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})-5=0$ on the three axes.

5. यदि $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ है, तो $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ को संतुष्ट करने वाला α का मान ज्ञात कीजिए जहाँ $A + A^T = \sqrt{2}\, I_2$ है, जहाँ A^T, A का परिवर्त है।

If $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, find α satisfying $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ when $A + A^T = \sqrt{2}\, I_2$; where A^T is transpose of A.

6. यदि A एक 3×3 का आव्यूह है तथा $|3A|=k|A|$ है, तो k का मान लिखिए।
If A is a 3×3 matrix and $|3A|=k|A|$, then write the value of k.

खण्ड - ब
SECTION - B

प्रश्न संख्या 7 से 19 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं।
Question numbers 7 to 19 carry 4 marks each.

7. ज्ञात कीजिए : $\int (x+3)\sqrt{3-4x-x^2}\, dx$.

Find : $\int (x+3)\sqrt{3-4x-x^2}\, dx$.

8. मान ज्ञात कीजिए : $\int_{-2}^{2} \frac{x^2}{1+5^x}\, dx$.

Evaluate : $\int_{-2}^{2} \frac{x^2}{1+5^x}\, dx$.

9. वक्र $y=x^3+2x-4$ की स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए, जो कि रेखा $x+14y+3=0$ पर लम्बवत हैं।

Find the equation of tangents to the curve $y=x^3+2x-4$, which are perpendicular to line $x+14y+3=0$.

10. यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(a+1)x+2\sin x}{x}, & x<0\\ 2, & x=0\\ \dfrac{\sqrt{1+bx}-1}{x}, & x>0\end{cases}$

$x=0$ पर सतत है तो a तथा b के मान ज्ञात कीजिए।

If $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(a+1)x+2\sin x}{x}, & x<0\\ 2, & x=0\\ \dfrac{\sqrt{1+bx}-1}{x}, & x>0\end{cases}$

is continuous at $x=0$, then find the values of a and b.

11. x के लिए हल कीजिए : $\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1}x+\tan^{-1}(x+1)=\tan^{-1}3x$.

अथवा

सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1}\left(\dfrac{6x-8x^3}{1-12x^2}\right)-\tan^{-1}\left(\dfrac{4x}{1-4x^2}\right)=\tan^{-1}2x\,;|2\,x|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Solve for x : $\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1}x+\tan^{-1}(x+1)=\tan^{-1}3x$.

OR

Prove that $\tan^{-1}\left(\dfrac{6x-8x^3}{1-12x^2}\right)-\tan^{-1}\left(\dfrac{4x}{1-4x^2}\right)=\tan^{-1}2x\,;|2\,x|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

12. यदि $x\cos(a+y)=\cos y$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$

अत: सिद्ध कीजिए कि $\sin a\frac{d^2y}{dx^2}+\sin 2(a+y)\frac{dy}{dx}=0$.

अथवा

यदि $y=\sin^{-1}\left[\frac{6x-4\sqrt{1-4x^2}}{5}\right]$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

If $x\cos(a+y)=\cos y$ then prove that $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$.

Hence show that $\sin a\frac{d^2y}{dx^2}+\sin 2(a+y)\frac{dy}{dx}=0$.

OR

Find $\frac{dy}{dx}$ if $y=\sin^{-1}\left[\frac{6x-4\sqrt{1-4x^2}}{5}\right]$

13. एक थैले X में 4 सफेद तथा 2 काली गेंदें हैं जबकि एक अन्य थैले Y में 3 सफेद तथा 3 काली गेंदें हैं। दो गेंदें यादृच्छया (बिना प्रतिस्थापना के) किसी एक थैले में से निकाली गई जो एक सफेद तथा एक काली पाई गईं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाली गई गेंदें थैले Y में से निकाली गई हैं।

अथवा

A तथा B बारी-बारी पासों के एक जोड़े को उछालते हैं जब तक कि उनमें कोई एक पासों पर आने वाली संख्याओं का योग 10 प्राप्त कर खेल को जीत नहीं लेता। यदि A खेल प्रारंभ करे तो उनके जीतने की क्रमश: प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए।

A bag X contains 4 white balls and 2 black balls, while another bag Y contains 3 white balls and 3 black balls. Two balls are drawn (without replacement) at random from one of the bags and were found to be one white and one black. Find the probability that the balls were drawn from bag Y.

OR

A and B throw a pair of dice alternately, till one of them gets a total of 10 and wins the game. Find their respective probabilities of winning, if A starts first.

14. बिंदु A(−1, 8, 4) से बिंदुओं B(0, −1, 3) तथा C(2, −3, −1) को मिलाने वाली रेखा पर डाले गए लंब के पाद के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। अत: रेखा BC में बिंदु A का प्रतिबिंब ज्ञात कीजिए।

Find the coordinates of the foot of perpendicular drawn from the point A(−1, 8, 4) to the line joining the points B(0, −1, 3) and C(2, −3, −1). Hence find the image of the point A in the line BC.

15. दर्शाइए कि चार बिंदु A(4, 5, 1), B(0, −1, −1), C(3, 9, 4) और D(−4, 4, 4) समतलीय हैं।

Show that the four points A(4, 5, 1), B(0, −1, −1), C(3, 9, 4) and D(−4, 4, 4) are coplanar.

16. एक टाइपिस्ट 10 अंग्रेजी और 3 हिन्दी के पृष्ठ टाइप करने के ₹ 145 लेता है, जबकि 3 अंग्रेजी और 10 हिन्दी के पृष्ठ टाइप करने के लिए ₹ 180 लेता है। आव्यूहों के प्रयोग से एक अंग्रेजी और एक हिन्दी का पृष्ठ टाइप करने के दाम अलग-अलग ज्ञात कीजिए। फिर एक गरीब विद्यार्थी श्याम से टाइपिस्ट ने 5 हिन्दी के पृष्ठ टाइप करने के केवल ₹ 2 प्रति पृष्ठ लिए। उसने गरीब विद्यार्थी से कितने कम दाम लिए? इस प्रश्न में कौन-से मूल्य दर्शाए गए हैं?

A typist charges ₹ 145 for typing 10 English and 3 Hindi pages, while charges for typing 3 English and 10 Hindi pages are ₹ 180. Using matrices, find the charges of typing one English and one Hindi page separately. However typist charged only ₹ 2 per page from a poor student Shyam for 5 Hindi pages. How much less was charged from this poor boy ? Which values are reflected in this problem ?

17. अवकल समीकरण

$2y\ e^{x/y}\ dx + (y - 2x\ e^{x/y})dy = 0$

का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए जबकि दिया है कि, यदि $x = 0$ है, तो $y = 1$ है।

Find the particular solution of the differential equation

$2y\ e^{x/y}\ dx + (y - 2x\ e^{x/y})dy = 0$

given that $x = 0$ when $y = 1$.

18. निम्न अवकल समीकरण का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया है कि जब $x = 0$ है, तो $y = 1$ है

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + y\cos x}{1 + \sin x}$$

Find the particular solution of differential equation : $\frac{dy}{dx} = -\frac{x + y\cos x}{1 + \sin x}$

given that $y = 1$ when $x = 0$.

19. ज्ञात कीजिए : $\int \frac{(2x - 5)\ e^{2x}}{(2x - 3)^3}\ dx$

अथवा

ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)(x + 2)}\ dx$

Find : $\int \frac{(2x-5)\, e^{2x}}{(2x-3)^3}\, dx$

OR

Find : $\int \frac{x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)(x + 2)}\, dx$

खण्ड - स

SECTION - C

प्रश्न संख्या 20 से 26 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं।

Question numbers 20 to 26 carry 6 marks each.

20. सिद्ध कीजिए कि $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में $y = \frac{4\sin\theta}{2 + \cos\theta} - \theta$, θ का वर्धमान फलन है।

अथवा

दर्शाइए कि दी गई तिरछी ऊँचाई वाले अधिकतम आयतन के शंकु का अर्ध शीर्ष कोण $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ है।

Prove that $y = \frac{4\sin\theta}{2 + \cos\theta} - \theta$ is an increasing function of θ on $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

OR

Show that semi-vertical angle of a cone of maximum volume and given slant height is $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

21. सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर सिद्ध कीजिए कि :

$$\begin{vmatrix} (x+y)^2 & zx & zy \\ zx & (z+y)^2 & xy \\ zy & xy & (z+x)^2 \end{vmatrix} = 2xyz\,(x+y+z)^3$$

अथवा

यदि $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ है तथा $A^3 - 6A^2 + 7A + kI_3 = O$ है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

Using properties of determinants, prove that

$$\begin{vmatrix} (x+y)^2 & zx & zy \\ zx & (z+y)^2 & xy \\ zy & xy & (z+x)^2 \end{vmatrix} = 2xyz\,(x+y+z)^3$$

OR

If $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ and $A^3 - 6A^2 + 7A + kI_3 = O$ find k.

22. समाकलन विधि से उस त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसके शीर्ष (2, −2), (4, 3) और (1, 2) हैं।

Using the method of integration, find the area of the triangular region whose vertices are (2, −2), (4, 3) and (1, 2).

23. माना कि $A = R \times R$ है और *, A में $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$ द्वारा परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है। दर्शाइए कि * क्रम विनिमेय तथा साहचर्य है। A में * का तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए। A के प्रत्येक अवयव $(a, b) \in A$ का प्रतिलोम भी ज्ञात कीजिए।

Let $A = R \times R$ and * be a binary operation on A defined by

$(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$

Show that * is commutative and associative. Find the identity element for * on A. Also find the inverse of every element $(a, b) \in A$.

24. प्रथम छः धन पूर्णांकों में से तीन संख्याएँ यादृच्छया (बिना प्रतिस्थापना के) चुनी गईं। माना X तीनों संख्याओं में से सबसे बड़ी संख्या व्यक्त करता है। X का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए। बंटन का माध्य तथा प्रसरण भी ज्ञात कीजिए।

Three numbers are selected at random (without replacement) from first six positive integers. Let X denote the largest of the three numbers obtained. Find the probability distribution of X. Also, find the mean and variance of the distribution.

25. एक सेवानिवृत्त व्यक्ति ₹ 50,000 की राशि को निवेशित करना चाहता है। उसका दलाल उसे दो प्रकार के बाँडों (अनुबंध पत्रों) 'A' और 'B' में निवेश करने की सलाह देता है, जिनमें निवेशित धन पर क्रमशः 10% और 9% लाभ उपलब्ध है। वह निश्चय करता है कि बाँड 'A' में कम से कम ₹ 20,000 निवेशित करेगा तथा बाँड 'B' में कम से कम ₹ 10,000। वह यह भी चाहता है कि कम से कम उतनी राशि बाँड 'A' में निवेश करे, जितनी कि उसने बाँड 'B' में करनी है। इस रैखिक प्रोग्रामन समस्या को आलेखीय विधि द्वारा हल कीजिए जिससे कि उसको अधिकतम लाभ प्राप्त हो सके।

A retired person wants to invest an amount of ₹ 50,000. His broker recommends investing in two type of bonds 'A' and 'B' yielding 10% and 9% return respectively on the invested amount. He decides to invest at least ₹ 20,000 in bond 'A' and at least ₹ 10,000 in bond 'B'. He also wants to invest at least as much in bond 'A' as in bond 'B'. Solve this linear programming problem graphically to maximise his returns.

26. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसमें समतलों

$$\vec{r} \cdot \left(\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}\right) - 4 = 0 \text{ तथा}$$

$$\vec{r} \cdot \left(-2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right) + 5 = 0$$

की प्रतिच्छेदन रेखा समाहित है और जिसके द्वारा x-अक्ष तथा y-अक्ष पर काटे गए अंत:खंड बराबर हैं।

Find the equation of the plane which contains the line of intersection of the planes

$$\vec{r} \cdot \left(\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}\right) - 4 = 0 \text{ and}$$

$$\vec{r} \cdot \left(-2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right) + 5 = 0$$

and whose intercept on x-axis is equal to that of on y-axis.

QUESTION PAPER CODE 65/3/N

EXPECTED ANSWER/VALUE POINTS

SECTION A

1. For a unique solution

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & k \end{vmatrix} \neq 0$$ $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow k \neq 0$ $\frac{1}{2}$

2. $\vec{a} + \vec{b} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ $\frac{1}{2}$

Unit vector parallel to $\vec{a} + \vec{b}$ is $\frac{1}{7}(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ $\frac{1}{2}$

3. Getting $\lambda = -9$ and $\mu = 27$ $\frac{1}{2}$ each

4. Getting equation as $\frac{x}{5/2} + \frac{y}{5} + \frac{z}{-5} = 1$ $\frac{1}{2}$

Sum of intercepts $\frac{5}{2} + 5 - 5 = \frac{5}{2}$ $\frac{1}{2}$

5. Finding $A^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $\frac{1}{2}$

Getting $\alpha = \frac{\pi}{4}$ or $45°$ $\frac{1}{2}$

6. $k = 27$ 1

SECTION B

7. Writing $x + 3 = A(-4 - 2x) + B$

$\Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}, \; B = 1$ 1

$\therefore \quad I = -\frac{1}{2}\int(-4 - 2x)\sqrt{3 - 4x - x^2}\, dx + \int\sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2 - (x+2)^2}\, dx$ 1

$I = -\frac{1}{3}(3 - 4 - x^2)^{3/2} + \frac{x+2}{2}\sqrt{3 - 4x - x^2} + \frac{7}{2}\sin^{-1}\frac{x+2}{\sqrt{7}} + C$ 2

8. Using property: $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a + b - x)\, dx$ 1

$I = \int_{-2}^{2}\left(\frac{x^2}{1+5^x}\right)dx = \int_{-2}^{2}\left(\frac{x^2}{1+5^{-x}}\right)dx$ 1

$2I = \int_{-2}^{2} x^2\, dx$ 1

$2I = \frac{16}{3}$ or $I = \frac{8}{3}$ 1

9. Slope of the tangent $= 3x^2 + 2 = 14$ 1

Points of contact (2, 8) and (–2, –16) 1

Equations of tangent

$14x - y - 20 = 0$ 1

and $14x - y + 12 = 0$ 1

10. L.H.L = a + 3 $1\frac{1}{2}$

R.H.L = b/2 $1\frac{1}{2}$

f(x) is continuous at x = 0. So, a + 3 = 2 = b/2 $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow a = -1$ and $b = 4$ $\frac{1}{2}$

11. $\tan^{-1}(x-1) + \tan^{-1}(x+1) = \tan^{-1} 3x - \tan^{-1} x$ $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\left(\frac{2x}{2-x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1+3x^2}\right) \qquad 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{2x}{2-x^2} = \frac{2x}{1+3x^2} \qquad \frac{1}{2}$$

$2x(1 + 3x^2 - 2 + x^2) = 0$ $\frac{1}{2}$

$x = 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 1

OR

Let $2x = \tan\theta$ 1

$$\text{L. H. S} = \tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right) \qquad 1$$

$= \tan^{-1}(\tan 3\theta) - \tan^{-1}(\tan 2\theta)$ 1

$= 3\theta - 2\theta$

$= \theta$ or $\tan^{-1} 2x$

$\therefore$ L. H. S = R. H. S 1

12. $$\frac{dx}{dy} = \frac{\sin a}{\cos^2(a+y)} \qquad 1\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a} \qquad \frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2\cos(a+y)\sin(a+y)}{\sin a}\frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{-\sin 2(a+y)}{\sin a}\frac{dy}{dx} \qquad 1\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin a \frac{d^2y}{dx^2} + \sin 2(a+y)\frac{dy}{dx} = 0$$ $\frac{1}{2}$

OR

Let $2x = \sin\theta$ 1

$$\therefore\ y = \sin^{-1}\left(\frac{6x - \sqrt{1-4x^2}}{5}\right)$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\sin\theta - \frac{4}{5}\cos\theta\right)$$

$= \sin^{-1}(\cos\alpha\sin\theta - \sin\alpha\cos\theta)$ $\quad [\cos\alpha = \frac{3}{5};\ \sin\alpha = \frac{4}{5}]$ 1

$= \sin^{-1}(\sin(\theta - \alpha))$

$= \theta - \alpha$ 1

$= \sin^{-1}(2x) - \alpha$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$ 1

13. Let E_1 and E_2 be the events of drawing bag X and bag Y respectively.

Then, $P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

Let A be the event of drawing one white and one black ball from any one of the bag without replacement.

Then,

$$\Rightarrow P(A/E_1) = \frac{4}{6}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{30}$$

$$P(A/E_2) = \frac{3}{6}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{18}{30}$$ $1\frac{1}{2}$

Using Bayes' Theorem, we have

$$P(E_2/A) = \frac{P(E_2)\,P(A/E_2)}{P(E_1)\,P(A/E_1) + P(E_2)\,P(A/E_2)}$$ 1

$$= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}}{\frac{1}{2}\times\frac{16}{30}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}} = \frac{9}{17}$$ 1

OR

Let A_i and B_i be the events of throwing 10 by A and B in the respective ith turn. Then,

$P(A_i) = P(B_i) = \frac{1}{12}$ and $P(\overline{A_i}) = P(\overline{B_i}) = \frac{11}{12}$ $1 + \frac{1}{2}$

Probability of winning A, when A starts first

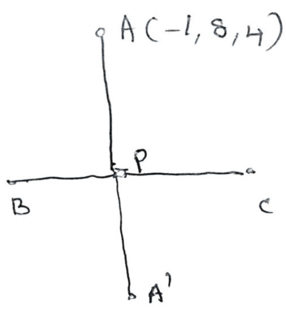
$$= \frac{1}{12}+\left(\frac{11}{12}\right)^2\frac{1}{12}+\left(\frac{11}{12}\right)^4\frac{1}{12}+\ldots$$ 1

$$= \frac{1/12}{1-(11/12)^2}$$

$$= \frac{12}{23}$$ 1

Probability of winning of B $= 1 - P(A) = 1 - \frac{12}{23} = \frac{11}{23}$ $\frac{1}{2}$

14.



Equation of line BC: $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-4} = r$ 1

General point on BC: $(2r, -2r-1, -4r+3)$

$\Rightarrow$ d.r.'s of AP: $(2r+1, -2r-9, -4r-1)$ 1

As AP $\perp$ BC $\Rightarrow r = -1$

$\Rightarrow$ Co-ordinates of P: $(-2, 1, 7)$ 1

Hence, coordinates of Image of A: $(-3, -6, 10)$ 1

15. $\overrightarrow{AB} = -4\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}$, $\overrightarrow{AC} = -\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$, $\overrightarrow{AD} = -8\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ $1\frac{1}{2}$

For 4 points to be coplanar, $[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}] = 0$

i.e., $\begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $1\frac{1}{2}$

$= -4(12+3) + 6(-3+24) - 2(1+32)$

$= -60 + 126 - 66 = 0$ which is true

Hence, points are coplanar. 1

16. Getting matrix equation as $\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 145 \\ 180 \end{pmatrix}$ $1\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 145 \\ 180 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E = 10, H = 15$ $1\frac{1}{2}$

The poor boy was charged ₹ 65 less

Value: Helping the poor 1

17. $\frac{dx}{dy} = \frac{2xe^{v} - y}{2ye^{v}}$

$\frac{x}{y} = v$, then $\frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$ 1

$v + y\frac{dv}{dy} = \frac{2vye^{v} - y}{2ye^{v}}$

$2\int e^{v} dv = -\int \frac{dy}{y}$ 1

General solution is: $2e^{v} = -\log|y| + C$ or $2e^{x/y} = -\log|y| + C$ 1

Particular solution is: $2e^{x/y} + \log|y| = 2$ 1

18. Writing linear equation $\frac{dy}{dx} + \frac{\cos x}{1+\sin x} y = -\frac{x}{1+\sin x}$ 1

I.F = $e^{\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx} = 1 + \sin x$ 1

General solution is: $y(1 + \sin x) = -\frac{x^2}{2} + C$ 1

Particular solution is: $y(1 + \sin x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ 1

19. Let $2x = t$

$I = \frac{1}{2}\int \frac{(t-5)}{(t-3)^3} e^t \, dt$ 1

$= \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{(t-3)^2} - \frac{2}{(t-3)^3}\right] e^t \, dt$ 2

$= \frac{1}{2}\frac{1}{(t-3)^2} e^t + C = \frac{1}{2}\frac{1}{(2x-3)^2} e^{2x} + C$ 1

OR

Writing $\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+2}$

$\Rightarrow$ $A = \frac{2}{5}, B = \frac{1}{5}, C = \frac{3}{5}$ 1

$\therefore$ $I = \frac{1}{5}\int \frac{2x}{x^2+1} dx + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{3}{5}\int \frac{dx}{x+2}$ 2

$\Rightarrow$ $I = \frac{1}{5}\log\left|x^2+1\right| + \frac{1}{5}\tan^{-1}x + \frac{3}{5}\log|x+2| + C$ 1

SECTION C

20. Getting $\frac{dy}{d\theta} = \frac{\cos\theta(4-\cos\theta)}{(2+\cos\theta)^2}$ 2

Equating $\frac{dy}{d\theta}$ to 0 and getting critical point as $\cos\theta = 0$ i.e., $\theta = \frac{\pi}{2}$ 1

For all $\theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \frac{dy}{d\theta} \ge 0$ 2

Hence, y is an increasing function of θ on $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 1

OR

Correct Figure 1

Writing $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{2} l^3 \sin^2\theta\cos\theta$ 1

Getting $\frac{dV}{d\theta} = \frac{\pi}{2} l^3 [2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta]$ 1

For maxima and minima, $\frac{dV}{d\theta} = 0$ $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ or $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $1\frac{1}{2}$

Getting $\frac{d^2V}{d\theta^2}$ negative 1

Hence, volume of the cone is maximum when semi-vertical angle is $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

21. $\Delta = \begin{vmatrix} (x+y)^2 & zx & zy \\ zx & (z+y)^2 & xy \\ zy & xy & (z+x)^2 \end{vmatrix}$

$R_1 \to zR_1,\ R_2 \to xR_2,\ R_3 \to yR_3$

$$\Delta = \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} z(x+y)^2 & z^2x & z^2y \\ x^2z & x(z+y)^2 & x^2y \\ y^2z & y^2x & y(z+x)^2 \end{vmatrix}$$ 1

$$= \frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} (x+y)^2 & z^2 & z^2 \\ x^2 & (z+y)^2 & x^2 \\ y^2 & y^2 & (z+x)^2 \end{vmatrix}$$ 1

$C_1 \to C_1 - C_3$ and $C_2 \to C_2 - C_3$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (x+y)^2 - z^2 & 0 & z^2 \\ 0 & (z+y)^2 - x^2 & x^2 \\ y^2 - (z+x)^2 & y^2 - (z+x)^2 & (z+x)^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z)^2 \begin{vmatrix} x+y-z & 0 & z^2 \\ 0 & z+y-x & x^2 \\ y-z-x & y-z-x & (z+x)^2 \end{vmatrix}$$ 1

$R_3 \to R_3 - R_1 - R_2$ we get

$$= (x+y+z)^2 \begin{vmatrix} x+y-z & 0 & z^2 \\ 0 & z+y-x & x^2 \\ -2x & -2z & 2xz \end{vmatrix}$$ 1

$C_1 \to C_1 + \frac{C_3}{z},\ C_2 \to C_2 + \frac{C_3}{x}$ we get

$$\Delta = (x+y+z)^2 \begin{vmatrix} x+y & \frac{z^2}{x} & z^2 \\ \frac{x^2}{z} & z+y & x^2 \\ 0 & 0 & 2xz \end{vmatrix} \qquad 1$$

$$= 2xyz\,(x + y + z)^3 \qquad 1$$

OR

For getting $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{pmatrix}$ $\qquad 1\frac{1}{2}$

For getting $A^3 = \begin{pmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{pmatrix}$ $\qquad 1\frac{1}{2}$

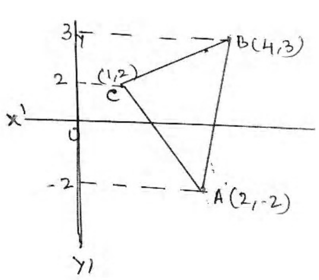
Simplifying $A^3 - 6A^2 + 7A + kI_3$ as $\begin{pmatrix} k-2 & 0 & 0 \\ 0 & k-2 & 0 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$ $\qquad 2$

Equating $\begin{pmatrix} k-2 & 0 & 0 \\ 0 & k-2 & 0 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad k - 2 = 0$

$k = 2 \qquad 1$

22. Correct Figure 1



Writing equations of three sides in terms of y as

$x_{AB} = \frac{2}{5}(y+2)+2;\; x_{BC} = 3(y-3)+4;\; x_{AC} = \frac{-1}{4}(y+2)+2 \qquad 1$

$\text{Area} = \int_{-2}^{3}\left(\frac{2}{5}(y+2)+2\right)dy - \int_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{4}(y+2)+2\right)dy - \int_{2}^{3}\left(3(y-3)+4\right)dy \qquad 1$

$= \left[\frac{2}{10}(y+2)^2+2y\right]_{-2}^{3} - \left[-\frac{1}{8}(y+2)^2+2y\right]_{-2}^{2} - \left[\frac{3}{2}(y-3)^2+4y\right]_{2}^{3} \qquad 2$

$= 15 - 6 - \frac{5}{2}$ or $\frac{13}{2} \qquad 1$

23. Proving * is commutative $\qquad 1\frac{1}{2}$

Proving * is associative $\qquad 1\frac{1}{2}$

Getting identity element as (0, 0) $\qquad 1\frac{1}{2}$

Getting inverse of (a, b) as (–a, –b) $\qquad 1\frac{1}{2}$

24. The variate X takes values 3, 4, 5, and 6 — 2

$P(X=3)=\frac{1}{20};\ P(X=4)=\frac{3}{20};\ P(X=5)=\frac{6}{20};\ P(X=6)=\frac{10}{20};$ — 1

Probability distribution is:

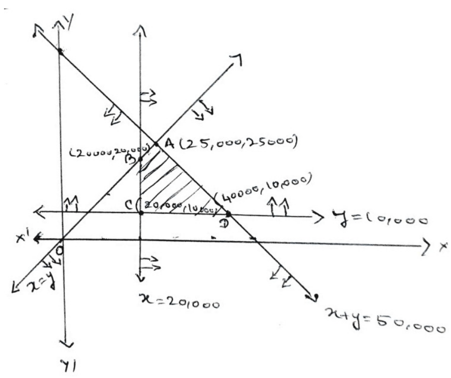
X	3	4	5	6
P(X)	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{10}{20}$

1

Mean = $\Sigma\, XP(X) = \frac{105}{20} = \frac{21}{4}$ — 1

Variance = $\Sigma X^2P(X) - (\Sigma X\, P(X))^2 = \frac{63}{80}$ — 1

25. Let the investment in bond A be ₹ x and in bond B be ₹ y



Objective function is: $Z = \frac{x}{10} + \frac{9}{100}y$ — 1

Subject to constraints

$x + y \geq 50000;\ x \geq 20{,}000;\ y \geq 10{,}000;\ x \geq y$ (*) — 2

Correct Figure — 2

Vertices of feasible region are A, B, C, and D

Point	$Z = \frac{x}{10} + \frac{9}{100}y$	Value
A(25,000, 25000)	2500 + 2250	4750
B(20,000, 20,000)	2000 + 1800	3800
C(20,000, 10,000)	2000 + 900	2900
D(40,000, 10,000)	4000 + 900	4900

Return is maximum when ₹ 40000 are invested in Bond A and ₹ 10000 in Bond B

Maximum return is ₹ 4900 — 1

> Since there are more than 3 constraints, student may be given full 6 marks even if reaches upto (*).

26. Required equation of the plane is

$\vec{r}.[(1-2\lambda)\hat{i} + (-2+\lambda)\hat{j} + (3+\lambda)\hat{k}] = 4 - 5\lambda$ — 2

Intercept of the plane on x-axis = Intercept of the plane on y-axis

$\Rightarrow \frac{4-5\lambda}{1-2\lambda} = \frac{4-5\lambda}{\lambda-2}$ i.e., $\lambda = 1, \frac{4}{5}$ $\left(\text{rejecting } \lambda = \frac{4}{5}\right)$ — 2

Required equation of the plane is $\vec{r}.(-\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}) + 1 = 0$ — 2